Dynamique

Exercice 1 Une plaque tourne autour de l'axe (Oz) vertical à la vitesse angulaire $\omega > 0$ constante. Un point matériel A de masse m se trouve attaché à la plaque, à la distance a de l'axe de rotation. On détache la masse à l'instant $t = 0$ et on étudie son mouvement ultérieur, en supposant qu'il n'y a pas de frottement avec la plaque.

1) De quel côté de la plaque doit se situer le point matériel A pour que celui-ci reste en contact avec la plaque pour $t > 0$?
2) Trouver la position A en fonction du temps, en écrivant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel inertiel par rapport auquel la plaque est en rotation. Vérifier explicitement que le point reste bien toujours en contact avec la plaque.
3) Même question, en écrivant la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel de la plaque.

Exercice 2 Deux chariots identiques se déplacent sans frottement l'un derrière l'autre à la même vitesse $\mathbf{v}_0$. Sur le chariot arrière se trouve Lucie, de masse m. Celle-ci saute sur le chariot avant à l'instant $t = 0$. Elle a une vitesse $\mathbf{u}$ par rapport à son chariot au moment où elle décolle. Sachant que les deux chariots ont une même masse M, déterminer la vitesse des deux chariots après le saut.

Exercice 3 Un système est constitué de deux masses ponctuelles identiques m, reliées par un ressort sans masse de constante de raideur k et de longueur au repos ℓ_0. Initialement, le système est vertical, un fil liant les deux masses de telle manière que le ressort est comprimé de $\Delta\ell > 0$ par rapport à sa position d'équilibre. À $t = 0$, on brûle le fil.

1) Trouver la condition sur $\Delta\ell$ pour que la masse inférieure puisse décoller.
2) En supposant que cette condition est satisfaite, calculer la hauteur maximale atteinte par le centre de masse du système.

Exercice 4 On se place dans un référentiel terrestre $(O, \mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z)$ de centre O sur la Grand Place de Bruxelles, $\mathbf{u}_x$ pointant vers l'Est et $\mathbf{u}_y$ vers le Nord. On considère les deux expériences suivantes :

i) On tire de O un boulet de canon, perpendiculairement à la surface de la Terre, avec une vitesse initiale de norme v_0. On appelle h la hauteur maximale atteinte par le boulet.

ii) On lâche, à une hauteur h juste au-dessus de O, une boule sans vitesse initiale.

Le but de l'exercice est de calculer la position O' des points d'impact au sol, dans les cas i) et ii).

1) Calculer les trajectoires en supposant que le référentiel terrestre est inertiel. A.N. : dans le cas i), quelle est la vitesse v_0, en m/s et en km/h, pour que $h = 100\,\mathrm{m}$? Au bout de combien de temps le boulet retombe-t-il par terre ? ; dans le cas ii), quelle est la vitesse à l'impact et quelle est le temps de chute pour $h = 100\,\mathrm{m}$?

2) Répondre aux questions suivantes par des calculs d'ordres de grandeur, en utilisant les résultats de la question précédente.

   a) Montrer que l'on peut négliger les variations du champ de gravitation et du champ de force d'inertie d'entraînement dans notre problème. Évaluer l'erreur relative commise en faisant cette approximation.

   b) Montrer que la modification de la pesanteur g due à la force d'inertie d'entraînement est négligeable. Évaluer l'erreur relative commise en faisant cette approximation.

   c) Montrer que toute déviation dans la direction Nord-Sud sera dominée par l'effet de la force d'inertie d'entraînement. Dans quelle direction se fera systématiquement cette déviation ?

   d) Montrer que toute déviation dans la direction Est-Ouest sera dominée par l'effet de la force d'inertie de Coriolis. Peut-on prédire sans calcul la direction de cette déviation dans chacune des expériences i) et ii) ?

3) Écrire la relation fondamentale de la dynamique, en négligeant les variations du champ de gravitation et du champ de force d'inertie d'entraînement.

4) Simplifier les équations obtenues en ne gardant que les termes dominants dans chacune d'entre elles. Résoudre les équations et en déduire la position du point d'impact O' dans les cas i) et ii). A.N. pour $h = 100\,\mathrm{m}$.

5) (Question à traiter après les exercices 7 et 8 sur la mécanique céleste) Expliquer comment résoudre le problème précédent sans utiliser les approximations

décrites à la question 2). On ne demande pas de faire de calcul, ce qui est direct mais fastidieux, mais simpliment d'expliquer en détail la démarche à suivre. Pour effectuer la discussion, il peut être judicieux de se placer dans le référentiel inertiel dont l'origine est au centre de la Terre et non pas dans le référentiel terrestre comme nous l'avons fait dans les questions précédentes.

Exercice 5 Une goutte d'eau sphérique tombe verticalement dans une atmosphère saturée de vapeur d'eau. Par suite de la condensation, le taux de croissance de la masse de la goutte par unité de temps est proportionnel à l'aire de sa surface. On note le coefficient de proportionnalité α, en kg.s^{-1}.m^{-2}. La masse volumique de l'eau est ρ. Le rayon initial de la goutte est r_0, sa vitesse initiale est v_0, sa hauteur initiale h_0. Déterminer sa hauteur et sa vitesse en fonction du temps, en négligeant la résistance de l'air.

Exercice 6 Le but de cet exercice est d'étudier un modèle microscopique très simple pour la propagation du son, dû à Newton.

On considère un système unidimensionnel, constitué d'une chaîne de $N+1$ ressorts identiques sans masse et de constante de raideur k, attachés à N particules ponctuelles identiques A_n de masse m. Le premier ressort est attaché au point O fixe et à la particule A_1, le dernier ressort à la particule A_N et au point fixe O', les autres ressorts joignent A_n et A_{n+1} pour $1 \leq n \leq N-1$. La longueur totale de la chaîne est notée L, $\boldsymbol{OO'} = L\mathbf{u}$, où $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire. Lorsque le système est à l'équilibre, $A_n = O_n$. On pourra repérer les points A_n par leurs coordonnées x_n définies par $\boldsymbol{OA}_n = x_n\mathbf{u}$ ou par les amplitudes du mouvement a_n définies par $\boldsymbol{O}_n\boldsymbol{A}_n = a_n\mathbf{u}$. On suppose que les amplitudes du mouvement sont toujours suffisamment faibles, en particulier $x_{n+1} > x_n$. Par convention, on pourra identifier le point O avec A_0 et le point O' avec A_{N+1}. On a donc $x_0 = 0$, $a_0 = 0$, $x_{N+1} = L$ et $a_{N+1} = 0$.

1) a) Montrer qu'à l'équilibre, $x_{n+1} - x_n = \ell$ est une constante indépendante de n que l'on exprimera en fonction de L et de N. Les longueurs ℓ et L caractérisent les dimensions microscopiques et macroscopiques du système.

   b) On définit le coefficient de compressibilité par

$$\chi = -\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial F},$$

   où $F\mathbf{u}$ est la force exercée en O sur le premier ressort lorsque le système est à l'équilibre. Calculer χ en fonction de k et ℓ.

c) Montrer que la grandeur

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}\,,$$

où ρ est la masse linéïque du système, a les dimensions d'une vitesse. Calculer c en fonction de ℓ, k et m.

d) On veut utiliser notre système pour modéliser un cylindre de gaz parfait de section d'aire A et de longueur L dans des conditions adiabatiques. La relation entre la pression et le volume d'un tel gaz est alors $PV^\gamma = \alpha$, où α est une constante. Le coefficient γ vaut 5/3 pour les gaz monoatomiques et 7/5 pour les gaz diatomiques. Calculer χ, ρ et $c = 1/\sqrt{\rho\chi}$ pour un tel gaz. A.N. : calculer c pour l'air en km/h à température ambiante $T = 293\,\mathrm{K}$. On donne la masse molaire de l'air, $M = 29\,\mathrm{g/mol}$ et la constante des gaz parfaits $R = 8.3\,\mathrm{J\,mol^{-1}\,K^{-1}}$.

2) Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour chaque point A_i. En déduire un système de N équations différentielles linéaires couplées pour les amplitudes a_n.

3) On définit $a(x,t) = a_n(t)$ pour $x = n\ell$.

a) On considère la limite $N \to \infty$ à L fixe (et donc en particulier $\ell \to 0$). Sous quelle condition sur le mouvement de la chaîne peut-on considérer que le champ $a(x,t)$ est continu et dérivable dans cette limite (on demande une réponse physique qualitative).

b) En supposant que cette condition est satisfaite, montrer que les équations obtenues à la question 2) sont équivalentes à l'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\,,$$

pour une vitesse $v > 0$ que l'on calculera. Quelle est la solution générale de cette équation ? Montrer que cette solution générale décrit la propagation d'ondes à la vitesse v. En déduire la vitesse du son dans notre modèle et comparer à la vitesse mesurée expérimentalement.

4) a) Montrer que l'on peut toujours écrire

$$a_n = \sum_{q=0}^{N} c_q\, e^{\frac{2i\pi nq}{N+1}}\,,$$

pour tout $0 \le n \le N+1$, en fonction de coefficients c_q que l'on exprimera explicitement en termes des a_n. Cette transformation est un exemple de transformée de Fourier discrète.

b) Utiliser la décomposition ci-dessus pour résoudre exactement les équations obtenues à la question 2).

c) En déduire que le mouvement le plus général de la chaîne est une superposition d'ondes de longueurs d'onde $\lambda = L/q$ et de pulsations $\omega(\lambda)$, pour $1 \leq q \leq N$, avec une relation de dispersion $\omega(\lambda)$ que l'on déterminera.

d) Quelle est la vitesse de propagation d'une onde de longueur d'onde λ ? Dans quelle limite retrouve-t-on le résultat de la question 3) ? Commentaires ?

Exercice 7 Un disque $\mathscr{D}$ homogène horizontal de masse M, de rayon R, de centre O, peut tourner sans frottement autour de l'axe vertical fixe $(O, \mathbf{u}_z)$. Un insecte de masse m suit le bord du disque et avance avec la vitesse v par rapport au disque. Sachant que le disque était au repos juste avant que l'insecte ne démarre, trouver son mouvement.

Exercice 8 On considère une tige rectiligne de masse m et de longueur L qui glisse sans frottement par ses extrémités A et B sur la paroi intérieure d'un cylindre de rayon $R > L/2$. Calculer la période des petites oscillations de ce dispositif.

Exercice 9 Sur les orbites elliptiques

1) Une planète évolue autour du Soleil sur une ellipse telle que les distances minimales et maximales entre le Soleil et la planète sont respectivement r_{m} et r_{M}. Calculer la période de révolution de la planète en supposant que la masse de la planète est négligeable devant la masse M du Soleil.

2) Une planète P évolue autour du Soleil S sur une orbite elliptique. À l'instant où elle se trouve à la distance r_0 du Soleil, sa vitesse est $\mathbf{v}_0$. Cette vitesse fait un angle α avec le vecteur position $\boldsymbol{SP}$. Calculer les distances minimale et maximale de la planète au Soleil, en supposant que la masse de la planète est négligeable devant la masse M du Soleil.

3) Dans un champ de force central, attractif en $1/r^2$, un point décrit une ellipse. Ses vitesses maximale et minimale sont respectivement v_{M} et v_{m}. Calculer l'excentricité de l'orbite.

Exercice 10

1) Une sonde suit une orbite elliptique de demi-grand axe a et d'excentricité e autour du soleil.

a) La sonde modifie sa vitesse tangentielle de v à $v(1+\eta)$ de manière instantanée lorsqu'elle se trouve au périhélie de sa trajectoire (η est a priori quelconque, positif ou négatif). Déterminer toutes les caractéristiques de la nouvelle trajectoire de la sonde en fonction de η.

b) Même question lorsque la sonde modifie sa vitesse à l'aphélie de sa trajectoire.

2) On considère l'application suivante. On suppose que la sonde est au départ sur une orbite circulaire de rayon R. On veut l'amener sur une nouvelle orbite circulaire de rayon $R' > R$. Montrer que ceci peut être fait en modifiant deux fois sa vitesse tangentielle d'une manière bien précise que l'on calculera. Combien de temps prend le transfert entre les deux orbites ? A.N. : calculer le temps nécessaire pour le transfert entre l'orbite terrestre et l'orbite martienne, en supposant que la Terre et Mars suivent approximativement des orbites circulaires autour du soleil.

Cette méthode peut se généraliser au transfert entre deux orbites elliptiques quelconques, y compris dans le cas où elles n'ont pas le même axe ou ne sont pas incluses dans le même plan. Cette technique joue un rôle important dans les voyages interplanétaires.

Exercice 11 Un plan incliné (P) fait un angle α avec l'horizontale. Les seuls mouvements envisagés ont lieu le long de la ligne de plus grande pente. On note g l'accélération de la pesanteur.

1) Un point matériel de masse m est mobile sur (P) sans frottement. Étudier le mouvement du point matériel en supposant qu'il est immobile en $t = 0$.

2) a) Une bille homogène de rayon r et de masse m roule sans glisser sur (P). Montrer que le mouvement de son centre de masse est le même que celui du point matériel de la question 1, pour une accélération de la pesanteur effective g' que l'on calculera en fonction de g. A.N. : calculer g' pour $r = 3\,\mathrm{cm}$ et $m = 100\,\mathrm{g}$.

b) On suppose que les coefficients de frottement statique et dynamique pour le contact entre la bille et le plan incliné sont f_{s} et f_{d}. Montrer qu'il existe un angle α_{c} que l'on calculera tel que si $\alpha < \alpha_{\mathrm{c}}$ la bille roule sans glisser.

c) On suppose que $\alpha > \alpha_{\mathrm{c}}$. Étudier alors le mouvement de la bille.

Exercice 12 On considère le dispositif de l'exercice 3 de la série d'exercices sur la Cinétique (et donc aussi de l'exercice 6 de la série d'exercices sur la Cinématique).

On rappelle que le cylindre $\mathscr{C}_1$ roule sans glisser dans le cylindre $\mathscr{C}_2$.

1) On suppose $\mathscr{C}_2$ fixe. Écrire les équations permettant de déterminer le mouvement de $\mathscr{C}_1$. Résoudre ces équation en faisant l'approximation des petites oscillations.
2) Les cylindres $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont maintenant mobiles. Écrire les équations permettant de déterminer le mouvement de $\mathscr{C}_1$ et de $\mathscr{C}_2$. Résoudre ces équations en faisant l'approximation des petites oscillations.

Exercice 13 On considère le dispositif de l'exercice 5 de la série d'exercices sur la Cinématique. On suppose que l'axe et le disque sont homogènes et de masses m et M respectivement.

1) Déterminer les axes principaux d'inertie et les moments d'inertie associés pour le solide $\mathscr{S}$.
2) Calculer l'impulsion totale, le moment cinétique par rapport à O et l'énergie cinétique du dispositif.
3) Écrire le théorème du moment cinétique en O et en déduire trois équations du mouvement qui permettent en principe de déterminer complètement le mouvement du solide.
4) Si
$$K_1 = \frac{1}{2}MR^2\,, \quad K_2 = \frac{1}{4}MR^2 + \Big(M + \frac{1}{3}m\Big)L^2\,,$$
montrer en utilisant les équations trouvées en 3) que les grandeurs
$$\omega = \dot\psi + \dot\phi\cos\theta\,, \quad E = \frac{1}{2}K_1\omega^2 + \frac{1}{2}K_2\big(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\big) + \frac{1}{2}\big(m+2M\big)gL\cos\theta$$
sont conservées. Quelle est l'interprétation de E ?
5) Montrer qu'il existe des mouvements pour lesquels $\theta = \theta_0$ est une constante, et qu'alors $\dot\phi = \Omega_1$ et $\dot\psi = \Omega_2$ sont aussi des constantes qui satisfont une relation que l'on obtiendra. Montrer que si $\Omega_2 = 0$, alors $\pi/2 < \theta_0 \le \pi$, mais que si $\Omega_2 \neq 0$ alors θ_0 peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et π.
6) Montrer que la solution $\theta = \pi/2$ est possible avec
$$\Omega_1\Omega_2 = \frac{m+2M}{M}\frac{Lg}{R^2}\,.$$
Montrer que cette solution est stable sous une petite perturbation et calculer la période des petites oscillations des variables θ, ϕ et ψ autour de la solution de départ.

Exercice 14 On considère une règle homogène, assimilable à une tige sans épaisseur de masse m et de longueur 2ℓ. À l'instant $t = 0$, la règle est posée sur le bord O d'une table horizontale, perpendiculairement au bord de la table et avec une angle $\theta_0 \geq 0$ par rapport à l'horizontale. On suppose que le centre de masse G de la règle se situe à l'extérieur de la table, à la distance r de O. La règle va donc basculer pour $t > 0$ et le but de l'exercice est d'étudier le mouvement de bascule de la règle. On note $\theta(t)$ l'angle entre l'horizontale et la règle à l'instant $t > 0$.

1) Dans cette question, on néglige tout frottement.

   a) Trouver les équations différentielles déterminant le mouvement de la règle. Calculer la force de réaction de la table sur la règle en O.

   b) Sans intégrer explicitement les équations du mouvement, montrer que si $\theta_0 > 0$ le mouvement initial de G est purement horizontal. Montrer que ce mouvement ne peut se poursuivre jusqu'à $\theta = \pi/2$ et qu'il existe nécessairement un angle $\theta_1 < \pi/2$ au-delà duquel la liaison entre la règle et la table est rompue.

2) Soit maintenant $f > 0$ le coefficient de frottement entre la règle et la table (on ne distingue pas les coefficients de frottement statique et dynamique dans cet exercice).

   a) En supposant qu'il n'y a pas de glissement en O, trouver l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$. Calculer la force de réaction en O.

   b) À quelle condition n'y a-t-il pas glissement au départ ?

   c) Cette condition étant remplie, montrer que la barre ne peut pas atteindre la position verticale sans glisser. Obtenir l'équation permettant de calculer l'angle θ_2 pour lequel la barre commence à glisser. Décrire le mouvement ultérieur et montrer que la barre ne peut pas atteindre la position verticale sans décoller.

   d) Obtenir les équations et décrire le mouvement de la barre après le décollage.

   e) Question facultative : résoudre numériquement les équations du mouvement et produire une animation permettant de visualiser le mouvement complet de la règle.